Résumé du cours : Topologie Métrique

Gönenç Onay
Galatasaray Ortaköy
Mat 301

18 décembre 2025

Résumé du cours : Topologie Métrique

Ce document propose une balade à travers les concepts fondamentaux des espaces métriques, en s'appuyant sur les discussions actuelles de notre cours, des feuilles de TD et du polycopié de référence.

1 Rappels

L'édifice de l'analyse repose sur une construction progressive des systèmes de nombres, chacun comblant les lacunes structurelles (algébriques ou analytiques) du précédent.

— **$\mathbb{N}$ et le Bon Ordre :** C'est le socle, l'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ muni de son ordre usuel possède une propriété fondamentale : le **bon ordre**. Tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément, ce qui nous donne le principe de récurrence.

— **$\mathbb{Z}$ et la Structure de Groupe :** Pour résoudre les équations additives ($a + x = b$), on symétrise $\mathbb{N}$ pour obtenir les entiers relatifs $\mathbb{Z}$. C'est un **groupe abélien** totalement ordonné. Il conserve une discreto-rigidité essentielle : il admet un plus petit élément strictement positif, 1, également le générateur du groupe, ce qui en fait le seul groupe cyclique infini (à isomorphisme près).

— **$\mathbb{Q}$ et la Structure de Corps :** Pour inverser la multiplication, on construit le **corps** des rationnels $\mathbb{Q}$. Si l'algèbre est satisfaite, l'analyse est lacunaire. Bien que $\mathbb{Q}$ soit dense (pas de "plus petit élément positif"), il est "troué" : des équations élémentaires comme $x^2 = 2$ n'y ont pas de solution.

Cette distinction entre $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ avoir ou non un minimum strictement positif est fondamentale et dépasse ces deux cas particuliers. Elle permet de classer **tous** les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ en deux catégories exclusives. Soit G un tel sous-groupe et $\alpha = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$. Si $\alpha > 0$ (cas discret), G est isomorphe à $\mathbb{Z}$ (engendré par α). Si $\alpha = 0$ (cas dense), G est dense dans $\mathbb{R}$ comme $\mathbb{Q}$. Notons que la **densité** évoquée ici est une densité d'ordre (intrinsèque), distincte a priori de la densité que l'on verra dans la suite.

Le passage aux réels est le véritable acte de naissance de l'analyse. On obtient $\mathbb{R}$ en "complétant" $\mathbb{Q}$, comblant ses trous via les **coupures de Dedekind** ou les suites de Cauchy. $\mathbb{R}$ devient un corps commutatif totalement ordonné ayant la **propriété de la borne supérieure** (Sup) : tout ensemble majoré admet une borne supérieure (le plus petit des majorants). Cette propriété de complétude garantit l'existence de nombres irrationnels ($\sqrt{2}$) ou transcendants (π, e). (L'extension finale à $\mathbb{C}$ sacrifie alors l'ordre pour gagner la clôture algébrique).

Dans $\mathbb{R}$, l'ordre dicte la **géométrie**. Les **intervalles** sont exactement les sous-ensembles convexes. La notion de **voisinage** (contenant un intervalle ouvert) permet de définir la **continuité** : l'image réciproque d'un voisinage est un voisinage. De même, la convergence des suites devient le moteur de l'approximation. La complétude assure que toute **suite de Cauchy** (les suites dont les termes se resserrent) converge vers une limite réelle (ce qui est faux dans $\mathbb{Q}$). Il en résulte que tout fermé borné de $\mathbb{R}$ est séquentiellement compact (**Théorème de Bolzano-Weierstrass**), et l'on peut résoudre des équations par point fixe (**Théorème de Banach**).

Tout ce décor est planté sur la droite réelle. Le but de ce cours est de généraliser ces concepts (proximité, convergence, continuité, complétude) à des ensembles arbitraires, où l'ordre n'existe pas ou ne suffit plus. Pour cela, nous avons besoin d'un nouvel outil pour mesurer l'écart entre les objets : la **distance**.

0.5 Interlude : La Boîte à Outils Logique

La plupart des démonstrations que l'on verra ne sont que des traductions rigoureuses de définitions bien choisies. L'histoire des mathématiques est un long effort pour "modéliser" nos intuitions géométriques (proximité, trou, continuité) dans le langage précis des ensembles et de la logique. Une fois les bonnes définitions posées, les preuves suivent souvent des schémas logiques récurrents. Voici une **boîte à outils** des réflexes essentiels :

Concept	Logique / Exemple	Interprétation & Usage
Négation & Quantificateurs	$\neg(\forall x \in E, P(x))$ **ssi** $\exists x \in E, \neg P(x)$ $\neg(\exists x \in E, P(x))$ **ssi** $\forall x \in E, \neg P(x)$	**Le Piège à Éviter :** On inverse les quantificateurs, mais **jamais** le type ou l'ensemble de définition ! "Pour tout $\varepsilon > 0$, A" devient "Il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $\neg A$". On ne passe pas à $\varepsilon < 0$.
Le Témoin Séquentiel	"Non ($\exists \lambda > 0$ tel que $A(\lambda)$)" **revient à dire que** $\forall \lambda > 0, \text{Non } A(\lambda)$	**Le pont Continu $\leftrightarrow$ Discret.** Si ça rate pour *tout* $\lambda > 0$, ça rate surtout pour toute suite λ_n tendant vers 0 sans être nulle, comme par exemple pour $\lambda_n = \frac{1}{n+1}$. **Usage :** Pour montrer qu'une limite/continuité est fausse, construisez une suite (u_n) qui "témoigne" de l'échec quand $n \to \infty$.
Dépendance Fonctionnelle	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \dots$	**L'ordre compte :** Le second dépend du premier. Ici, on témoigne une association entre ε et δ, qui induit en fait une fonction $\varepsilon \mapsto \delta(\varepsilon)$. *Exemple :* Si ε devient plus petit (exigence plus forte), δ doit s'adapter (souvent devenir plus petit).
Union & Intersection Infinies	$x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ **ssi** $\exists i \in I, x \in A_i$ $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ **ssi** $\forall i \in I, x \in A_i$	**Traduction instantanée :** Union $\leftrightarrow$ il existe ($\exists$). "Je suis dans l'un des clubs". Intersection $\leftrightarrow$ pour tout ($\forall$). "Je suis membre de tous les clubs".
Contraposée vs Absurde	**Contraposée :** $(A \implies B)$ **est logiquement équivalent à** $(\text{Non } B \implies \text{Non } A)$ **Absurde :** Supposer A et Non B, aboutir à une contradiction.	**Nuance cruciale :** **Contraposée** = Reformuler le chemin (Constructif). *Exemple :* Pour montrer "n^2 pair $\implies$ n pair", montrer "n impair $\implies$ n^2 impair". **Absurde** = Faire exploser le monde (Destructif). On suppose le contraire et on cherche une contradiction. *Conseil :* Tentez toujours la contraposée d'abord.

2 La Notion de Distance

Au cur de l'analyse se trouve l'idée de "proximité". Un **espace métrique** est une formalisation simple de cette idée. C'est un couple (E, d) où E est un ensemble et $d : E \times E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ est une **distance** (ou métrique), qui doit satisfaire pour tous $x, y, z \in E$ les axiomes suivants :

1. **Séparation :** $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. **Symétrie :** $d(x, y) = d(y, x)$.
3. **Inégalité triangulaire :** $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Cette dernière propriété, l'inégalité triangulaire, est cruciale ; elle capture l'intuition que le chemin direct est toujours le plus court.

Exercice 2.1. Montrer que $|d(x, z) - d(x, y)| \leq d(y, z)$ pour tous $x, y, z \in E$.

2.1 Quelques exemples fondamentaux

— **La distance usuelle sur** $\mathbb{R}$ est simplement $d(x, y) = |x - y|$.
— **Sur** $\mathbb{R}^n$, plusieurs distances coexistent. Pour $x = (x_i), y = (y_i), (i = 1 \ldots n)$:
 — $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ (la distance de Manhattan).
 — $d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$ (la distance euclidienne).
 — $d_\infty(x, y) = \max_{i=1..n} |x_i - y_i|$ (la distance du sup).
 Comme nous le verrons, bien que numériquement différentes, ces distances décrivent la même notion de "proximité" sur $\mathbb{R}^n$ (cf. TD2, elles sont topologiquement équivalentes).
— **Sur l'espace** $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[0, 1]$, la **distance de la convergence uniforme** est $d_\infty(f, g) = \sup_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|$.
— **La distance discrète** sur n'importe quel ensemble E : $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$ et 0 sinon. C'est un cas extrême où tous les points sont "isolés" les uns des autres.
— **La distance SNCF (TD1)** sur $\mathbb{R}^2$ est un exemple plus exotique où la distance entre deux points dépend de leur position par rapport à l'origine (Paris !), illustrant que les métriques peuvent être non triviales.
— **La distance ultramétrique** sur un ensemble E est une distance $d : E \times E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ satisfaisant une inégalité triangulaire renforcée :

$$d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\} \quad \text{pour tous } x, y, z \in E.$$

 Cette condition est plus forte que l'inégalité triangulaire usuelle (puisque $\max\{a, b\} \leq a+b$), et elle confère aux espaces ultramétriques des propriétés surprenantes. Par exemple, dans un espace ultramétrique, tout point d'une boule ouverte en est un centre (TD3, Exercice 4a), et toute boule ouverte est également fermée (TD3, Exercice 4c) !
 L'exemple fondamental est la **distance p-adique** sur $\mathbb{Q}$ (TD3, Exercice 4). Pour un nombre premier p fixé, on définit d'abord la valuation p-adique $v_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ (le plus grand exposant de p dans la décomposition en facteurs premiers), puis la norme p-adique $|x|_p = p^{-v_p(x)}$ pour $x \neq 0$ et $|0|_p = 0$. La distance p-adique est alors $d_p(x, y) = |x - y|_p$. Cette distance capture une notion de "proximité" radicalement différente de la distance usuelle : deux nombres sont p-adiquement proches s'il sont divisibles par une puissance élevée de p.

2.2 Constructions de nouvelles métriques

Les métriques peuvent être construites de multiples façons. Voici les constructions fondamentales qui permettent d'engendrer de nouveaux espaces métriques à partir de structures existantes.

2.2.1 Distance induite sur un sous-ensemble

Si (E,d) est un espace métrique et $A \subseteq E$, on peut munir A de la **distance induite** (ou la restriction)

$$d_{|A} : A \times A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

définie par $d_{|A}(x,y) = d(x,y)$ pour $x, y \in A$. Les ouverts de $(A, d_{|A})$ sont exactement les ensembles de la forme $U \cap A$ où U est un ouvert de (E,d). De même, les fermés de $(A, d_{|A})$ sont les ensembles de la forme $F \cap A$ où F est un fermé de (E,d).

2.2.2 Distance image réciproque

Plus généralement, si $f : A \to E$ est une application **injective** d'un ensemble A vers un espace métrique (E,d), on peut munir A d'une distance définie par :

$$d_f(a, a') := d(f(a), f(a')).$$

Cette distance sur A est appelée la **distance image réciproque** (en anglais : *pullback metric*). Elle "tire en arrière" la métrique de E via f. L'injectivité de f garantit la propriété de séparation : $d_f(a,a') = 0 \Leftrightarrow f(a) = f(a') \Leftrightarrow a = a'$. Cette construction permet de transférer la structure métrique de l'espace d'arrivée vers l'ensemble de départ.

La distance induite d_A ci-dessus n'est qu'un cas particulier de la distance image réciproque, lorsque A est un sous-ensemble de E et f l'injection canonique ($x \mapsto x$).

2.2.3 Distance produit

Lorsqu'on a deux espaces métriques (E,d) et (F,δ), on peut construire un espace métrique sur le produit cartésien $E \times F$. Une distance naturelle est la **distance produit** (ou distance sup) définie par :

$$d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{d(x_1,x_2), \delta(y_1,y_2)\}.$$

Cette construction est fondamentale. Elle permet de comprendre la convergence dans le produit : une suite (u_n, v_n) converge vers (u,v) dans $(E \times F, d_\infty)$ si et seulement si $u_n \to u$ dans (E,d) et $v_n \to v$ dans (F,δ) (cf. TD4, Exercice 5). On peut aussi considérer d'autres distances produit, comme $d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d(x_1,x_2) + \delta(y_1,y_2)$ ou la distance euclidienne $d_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{d(x_1,x_2)^2 + \delta(y_1,y_2)^2}$.

2.2.4 Distance induite par une norme

Soit $\mathbb{K}$ le corps des réels $\mathbb{R}$ ou des complexes $\mathbb{C}$. Un **espace vectoriel normé** sur $\mathbb{K}$ est un couple $(E, ||\cdot||)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $||\cdot|| : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ est une **norme**, c'est-à-dire une application satisfaisant pour tous $x, y \in E$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$:

1. **Séparation :** $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. **Homogénéité :** $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$;
3. **Inégalité triangulaire :** $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Tout espace vectoriel normé devient naturellement un espace métrique avec la **distance induite** $d(x,y) = ||x-y||$. Cette distance hérite de la structure vectorielle : elle est invariante par translation, i.e. $d(x+a, y+a) = d(x,y)$ pour tout $a \in E$ (cf. TD2).

3 Vocabulaire Topologique : Ouverts, Fermés et Voisinages

La distance nous permet de définir les **boules ouvertes** $B(x,r) = \{y \in E \mid d(x,y) < r\}$ et les **boules fermées** $B_{\mathtt{F}}(x,r) = \{y \in E \mid d(x,y) \leq r\}$ ($r \geq 0$). Avec notre convention, r peut être nul, auquel cas $B(x,0) = \emptyset$ et $B_{\mathtt{F}}(x,0) = \{x\}$.

3.1 Voisinages

Une partie $V \subseteq E$ est un **voisinage** d'un point $x \in E$ s'il existe un rayon $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(x, r)$ soit entièrement contenue dans V. On note $\mathcal{V}(x)$ (ou $\mathcal{V}_d(x)$ quand on veut préciser la métrique) l'ensemble de tous les voisinages de x. Les voisinages capturent l'idée de "proximité locale" autour d'un point : un voisinage est une région qui contient x avec "un peu d'espace de manuvre" autour de lui. Remarquons qu'un voisinage n'est pas nécessairement ouvert ; par exemple, $[0, 1]$ est un voisinage de $1/2$ dans $\mathbb{R}$, bien qu'il ne soit pas ouvert. Notons qu'un voisinage peut être très grand : E elle-même est un voisinage de chacun de ses points.

3.2 Ouverts

Une partie $U \subseteq E$ est dite **ouverte** si chaque point de U est le centre d'une petite boule ouverte non vide entièrement contenue dans U. C'est-à-dire, $\forall x \in U, \exists r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq U$. Les caractérisations suivantes sont équivalentes :

— U est un ouvert ;

— U est un voisinage de chacun de ses points.

Exercice 3.1. Montrer que les boules ouvertes sont elles-mêmes des ouverts.

L'espace entier, l'ensemble vide, toute union et toute intersection finie d'ouverts sont des ouverts.

3.3 Fermés

Un ensemble F est **fermé** si son complémentaire $E \setminus F$ est ouvert.

Toute intersection et toute union finie de fermés sont des fermés. Le cercle unité S^1 dans $\mathbb{R}^2$ est un exemple de fermé (TD3).

Attention, "ouvert" et "fermé" ne sont pas des contraires. Une partie peut être les deux (dans l'espace discret, toutes les parties le sont) ou aucun des deux (comme $[0, 1[$ dans $\mathbb{R}$). Dans un espace ultramétrique, on peut montrer que les boules ouvertes sont aussi fermées (TD3) !

3.4 Les opérateurs topologiques

Pour toute partie $A \subseteq E$, on peut définir quatre régions fondamentales.

3.4.1 L'intérieur

L'**intérieur** de A, noté $\mathring{A}$, est le plus grand ouvert contenu dans A. On peut le caractériser de manière équivalente comme l'ensemble des points dont A est un voisinage :

$$\mathring{A} = \{x \in A \mid A \in \mathcal{V}(x)\} = \{x \in E \mid \exists r > 0, B(x, r) \subseteq A\}.$$

Un ensemble V est un voisinage d'un point x si et seulement si x appartient à l'intérieur de V. Il s'ensuit que A est ouvert si et seulement si $A = \mathring{A}$.

3.4.2 L'adhérence

L'**adhérence** (ou la *fermeture*) de A, notée $\bar{A}$, est le plus petit fermé contenant A. C'est l'ensemble des points "infiniment proches" de A, au sens où toute boule centrée sur l'un d'eux rencontre A :

$$\bar{A} = \{x \in E \mid \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset\}.$$

3.4.3 L'extérieur

L'**extérieur** de A, noté $\mathrm{ext}(A)$, est l'intérieur du complémentaire : $\mathrm{ext}(A) = \overset{\circ}{E \setminus A}$. C'est l'ensemble des points qui sont "loin" de A, au sens où ils possèdent un voisinage entièrement disjoint de A.

3.4.4 La frontière

La **frontière** de A, notée $\mathrm{Fr}(A)$, est définie par $\mathrm{Fr}(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A}$. C'est l'ensemble des points qui sont à la fois infiniment proches de A et de son complémentaire : ni intérieurs à A, ni extérieurs à A. Ces trois ensembles forment une partition de l'espace tout entier :

$$E = \mathring{A} \sqcup \mathrm{Fr}(A) \sqcup \mathrm{ext}(A).$$

L'exercice du TD3 demandant si $\overline{B(a,r)} = B_{\mathtt{F}}(a,r)$ est instructif. La réponse est non en général. Dans un espace discret, $\overline{B(x,1)} = \overline{\{x\}} = \{x\}$, mais $B_{\mathtt{F}}(x,1) = E$.

Exercice 3.2. Montrer que cela devient vrai lorsque la distance en question est induite par une norme.

3.4.5 Interlude : Topologie

Une topologie sur un ensemble E est la donnée d'une collection de parties de E, appelées *ouverts*, contenant E et $\emptyset$, et stable par intersection finie et réunion quelconque. Les opérateurs ci-dessus ont un sens dans ce cadre plus général, sans faire appel à une distance (et donc sans boules). Un espace métrique induit donc une topologie via ses ouverts.

Notons que dans un espace métrique, deux points distincts peuvent être **séparés** par des ouverts disjoints : si $x \neq y$, alors il existe U_x, U_y ouverts, tels que $x \in U_x, y \in U_y$ et $U_x \cap U_y = \emptyset$. Ce n'est pas le cas pour tout espace topologique (cf. les exercices 2 et 6 dans Quiz).

3.5 Équivalence topologique des métriques

Deux distances d et δ sur un même ensemble E sont dites **topologiquement équivalentes** si elles définissent la même famille d'ouverts, ou, de façon équivalente, la même famille de voisinages pour chaque point. Pour tout $x \in E$, on a alors $\mathcal{V}_d(x) = \mathcal{V}_\delta(x)$.

En pratique, pour montrer que deux distances sont topologiquement équivalentes, on utilise souvent le critère suivant : pour tout $x \in E$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta, \eta' > 0$ tels que

$$B_\delta(x,\eta) \subseteq B_d(x,\varepsilon) \quad \text{et} \quad B_d(x,\eta') \subseteq B_\delta(x,\varepsilon).$$

Cela signifie que toute boule ouverte pour une distance contient une boule ouverte (centrée au même point) pour l'autre, et vice-versa (cf. TD2, Exercice 3).

Il s'ensuit que d et δ sont topologiquement équivalentes si et seulement si elles induisent la même **topologie**.

Noter que de manière générale, pour toute distance d, d et $\min(d,1)$ sont topologiquement équivalentes (Exercice !).

Exemple fondamental : Sur $\mathbb{R}^n$, les distances d_1, d_2, et d_∞ sont topologiquement équivalentes. On peut le montrer en vérifiant les inclusions de boules. Par exemple, le TD2 (Exercice 4) démontre explicitement que $\mathcal{V}_{d_1}(0) = \mathcal{V}_{d_\infty}(0)$ sur $\mathbb{R}^2$. Par invariance par translation (ces distances provenant de normes), cela s'étend à tout point de $\mathbb{R}^n$. Cette équivalence a des conséquences profondes : une suite converge pour l'une de ces distances si et seulement si elle converge pour les autres, et la limite est la même (cf. TD4, Exercice 4). Autrement dit, sur $\mathbb{R}^n$, la convergence coordonnée par coordonnée (associée à d_1 ou d_∞) équivaut à la convergence euclidienne (associée à d_2).

3.6 Équivalence lipschitzienne (ou uniforme) des métriques

Deux distances d et δ sur un même ensemble E sont dites **lipschitziquement équivalentes** s'il existe une constante $a > 0$ et $b > 0$, telle que pour tout $x, y \in E$,

$$ad(x,y) \leq \delta(x,y) \leq bd(x,y).$$

Exercice 3.3. Montrer que l'équivalence lipschitzienne implique l'équivalence topologique, et que les distances de l'exemple fondamental de topologie sur $\mathbb{R}^n$ sont lipschitziquement équivalentes.

4 Suites : Points d'Accumulation et Convergence

Une suite est une fonction $u : \mathbb{N} \to E$. Les **termes** de u sont notés u_n ($\in E$), et la suite elle-même $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4.1 Points d'accumulation

Un point $a \in E$ est un **point d'accumulation** de la suite (u_n) si la suite "revient" infiniment souvent aussi près que l'on veut de a. C'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N \text{ tel que } d(u_n, a) < \varepsilon.$$

ou de manière équivalente : pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble des indices

$$u^{-1}(B(a,\varepsilon)) = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in B(a,\varepsilon)\}$$

est infini.

4.2 Convergence

Proposition 4.1. *Soit (u_n) une suite d'éléments de (E,d) et soit $\ell \in E$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour tout réel strictement positif ε, il existe un entier naturel N tel que pour tout entier $n \geq N$, la distance entre u_n et ℓ est strictement inférieure à ε. Cela s'écrit :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d(u_n, \ell) < \varepsilon.$$

2. *Pour tout réel strictement positif ε, l'ensemble des indices des termes de la suite qui n'appartiennent pas à la boule ouverte de centre ℓ et de rayon ε est un ensemble fini. Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \notin B(\ell,\varepsilon)\}$ est fini. Cela signifie que l'image réciproque par u de toute boule centrée en ℓ est une partie **cofinie** de $\mathbb{N}$ (son complémentaire dans $\mathbb{N}$ est fini).*

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2) : Si $n \geq N \Rightarrow u_n \in B(\ell,\varepsilon)$, alors $\{n \mid u_n \notin B(\ell,\varepsilon)\} \subseteq \{0, 1, \ldots, N-1\}$, qui est fini.
(2) $\Rightarrow$ (1) : Si $\{n \mid u_n \notin B(\ell,\varepsilon)\}$ est fini, soit N un majorant de cet ensemble plus 1. Alors $n \geq N \Rightarrow u_n \in B(\ell,\varepsilon)$. ☐

On dit qu'une suite (u_n) d'un espace métrique (E,d) **converge** vers un élément $\ell \in E$ si l'une des conditions équivalentes énoncées dans la proposition ci-dessus est satisfaite.

L'élément ℓ est alors appelé la **limite** de la suite (u_n). Si une suite converge, sa limite est unique. Autrement les sous-suites d'une suite convergente convergent vers la même limite.

Si une suite (u_n) converge vers une limite ℓ, alors ℓ est son unique point d'accumulation.

Il est important de noter que la réciproque n'est pas toujours vraie. Une suite peut posséder un unique point d'accumulation sans pour autant converger. Par exemple, la suite définie dans $\mathbb{R}$ par $u_n = 1/n$ si n est impair et $u_n = n$ si n est pair a 0 comme unique point d'accumulation, mais elle ne converge pas car les termes de rang pair ne sont pas bornés.

4.3 Lien entre suites et topologie

On a vu que le lien entre suites et topologie est intime :

— **Caractérisation séquentielle de l'adhérence :** $x \in \bar{A}$ si et seulement s'il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers x.

— **Caractérisation séquentielle des fermés :** Une partie F est fermée si et seulement si les limites de toutes les suites convergentes d'éléments de F appartiennent à F.

4.4 Rotations sur le Cercle (TD4)

Considérons la suite $z_n = e^{in\theta}$ sur le cercle unité $S^1 \subset \mathbb{C}$ (TD4, Exercice 3). Cela correspond à la position d'un point tournant d'un angle θ à chaque étape.

— **Cas rationnel ($\theta \in \mathbb{Q}\pi$) :** La suite est **périodique**. Elle repasse exactement par les mêmes points. L'orbite est un ensemble fini.

— **Cas irrationnel ($\theta \notin \mathbb{Q}\pi$) :** La suite ne repasse *jamais* deux fois par le même point. Mieux, elle est **dense** dans le cercle : elle passe arbitrairement près de n'importe quel point de S^1, ou encore $\overline{\{z_n \mid n \in \mathbb{N}\}} = S^1$.

C'est le prototype du **chaos déterministe** : une règle simple répétée une infinité de fois peut engendrer une complexité surprenante (densité) ou une structure rigide (périodicité). Ce type de dichotomie est central en **théorie ergodique**.

5 Applications Continues

5.1 Intuition et Définition

L'idée intuitive de la continuité est celle de la "préservation de la proximité". Si une fonction f transforme un espace métrique (E, d) vers un autre (F, δ), nous voulons que f respecte la structure topologique : pour que f soit continue en un point x_0, il faut que l'on puisse contrôler **l'erreur en sortie** ($f(x)$ proche de $f(x_0)$) en restreignant suffisamment l'entrée (x proche de x_0). C'est la célèbre définition "epsilon-delta" de Weierstrass, qui formalise l'absence de "sauts" ou de "déchirures".

Proposition 5.1. *Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques, $f : E \to F$ une application, et $x_0 \in E$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. ***(ε-η)*** $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in E, \quad d(x, x_0) < \eta \implies \delta(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.
2. ***Voisinages :*** *Pour tout voisinage V de $f(x_0)$ dans F, l'image réciproque $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x_0 dans E.*

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2) : Soit $V \in \mathcal{V}(f(x_0))$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(f(x_0), \varepsilon) \subseteq V$. Par (1), il existe $\eta > 0$ tel que $f(B(x_0, \eta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon) \subseteq V$, donc $B(x_0, \eta) \subseteq f^{-1}(V)$, i.e., $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x_0)$.
(2) $\Rightarrow$ (1) : Soit $\varepsilon > 0$. La boule $B(f(x_0), \varepsilon)$ est un voisinage de $f(x_0)$. Par (2), $f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon)) \in \mathcal{V}(x_0)$, donc il existe $\eta > 0$ avec $B(x_0, \eta) \subseteq f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$, i.e., $d(x, x_0) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. $\square$

On dit que f est **continue en** x_0 si elle satisfait ces conditions équivalentes. Si f est continue en tout point de E, on dit simplement que f est **continue**.

5.2 Caractérisations Équivalentes

La puissance de la topologie réside dans sa capacité à reformuler cette définition locale (point par point) en termes globaux (ensembles ouverts) ou séquentiels.

Théorème 5.1. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est continue.*
2. ***Caractérisation séquentielle :*** *Pour toute suite (x_n) convergeant vers x dans E, la suite image $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$ dans F. ("La continuité commute avec la limite").*
3. ***Caractérisation par l'adhérence :*** *Pour tout sous-ensemble A de E, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.*
4. ***Caractérisation par les fermés :*** *Pour tout fermé K de F, l'image réciproque $f^{-1}(K)$ est un fermé de E.*
5. ***Caractérisation par les ouverts :*** *Pour tout ouvert V de F, l'image réciproque $f^{-1}(V)$ est un ouvert de E.*

Démonstration. On montre (1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (4) ⇒ (5) ⇒ (1).

(1) ⇒ (2) : Soit $(x_n) \to x$ et $\varepsilon > 0$. Par continuité en x, il existe $\eta > 0$ tel que $d(y, x) < \eta \Rightarrow \delta(f(y), f(x)) < \varepsilon$. Comme $x_n \to x$, il existe N tel que $n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < \eta$, donc $\delta(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$.

(2) ⇒ (3) : Soit $x \in \overline{A}$. Par caractérisation séquentielle de l'adhérence, il existe $(a_n) \subseteq A$ avec $a_n \to x$. Par (2), $f(a_n) \to f(x)$. Comme $f(a_n) \in f(A)$, on a $f(x) \in \overline{f(A)}$.

(3) ⇒ (4) : Soit $K \subseteq F$ fermé. On veut montrer que $f^{-1}(K)$ est fermé, i.e., $\overline{f^{-1}(K)} \subseteq f^{-1}(K)$. Par (3) appliqué à $A = f^{-1}(K)$, on a $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{K} = K$ (car K est fermé). Donc $\overline{A} \subseteq f^{-1}(K) = A$.

(4) ⇒ (5) : Immédiat par passage au complémentaire : si V est ouvert dans F, alors $F \setminus V$ est fermé, donc $f^{-1}(F \setminus V) = E \setminus f^{-1}(V)$ est fermé dans E, d'où $f^{-1}(V)$ est ouvert.

(5) ⇒ (1) : Fixons $x_0 \in E$ et $\varepsilon > 0$. Par (5), $f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$ est ouvert dans E et contient x_0. Un ouvert étant voisinage de chacun de ses points, $f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon)) \in \mathcal{V}(x_0)$, ce qui est exactement la définition de la continuité en x_0. □

Attention : l'image directe d'un ouvert n'est pas nécessairement ouverte (pensez à la fonction constante ou à la projection sur un axe).

Remarque : Dans (3), l'inclusion $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ est stricte en général. Par exemple, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = e^x$ et $A = \mathbb{R}$, alors $f(\overline{A}) = f(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$, mais $\overline{f(A)} = [0, +\infty[$.

5.3 Unification des Concepts

Le TD5 (Exercice 3) propose une vision unificatrice. On peut munir l'ensemble $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ d'une distance appropriée pour en faire un espace métrique où les "voisinages de l'infini" sont les ensembles compléments de parties finies. Alors, dire qu'une suite (u_n) converge vers ℓ revient exactement à dire que la fonction $\tilde{u} : \mathbb{N} \cup \{\infty\} \to E$ définie par $\tilde{u}(n) = u_n$ et $\tilde{u}(\infty) = \ell$ est **continue au point** ∞. Cette construction s'appelle la **compactification d'Alexandroff**, et peut être adaptée à d'autres ensembles, *dits localement compacts.*

5.4 Applications Lipschitziennes, Isométries et Homéomorphismes

Une forme de continuité "quantitative" plus forte est la condition de Lipschitz.

Définition 5.1. Une application $f : (E, d) \to (F, \delta)$ est dite **lipschitzienne** (ou **k-lipschitzienne**) s'il existe une constante $k \geq 0$ telle que pour tous $x, y \in E$:

$$\delta(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y).$$

Proposition 5.2. *Toute application lipschitzienne est continue.*

Démonstration. Soit f une application k-lipschitzienne et $x_0 \in E$. Pour $\varepsilon > 0$, posons $\eta = \varepsilon/k$ (ou $\eta = 1$ si $k = 0$). Alors $d(x, x_0) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(x_0)) \leq k \cdot d(x, x_0) < k \cdot \eta = \varepsilon$. □

La réciproque est fausse : $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0,1]$ est continue mais pas lipschitzienne (sa dérivée explose en 0).

Exemple/Exercice : La distance $d : E \times E \to \mathbb{R}$ elle-même est lipschitzienne. Pour tout $a \in E$, l'application $x \mapsto d(x,a)$ est 1-lipschitzienne. Exercice : S'en convaincre.

Deux espaces métriques sont **homéomorphes** s'ils sont indistinguables du point de vue topologique.

Définition 5.2. Un **homéomorphisme** de (E,d) vers (F,δ) est une bijection $f : E \to F$ telle que f et sa réciproque f^{-1} soient continues.

Si un tel f existe, E et F ont exactement la même structure d'ouverts : U est ouvert dans E si et seulement si $f(U)$ est ouvert dans F.

Proposition 5.3. *Deux distances d_1 et d_2 sur un même ensemble E sont topologiquement équivalentes si et seulement si l'application identité $Id_E : (E,d_1) \to (E,d_2)$ est un homéomorphisme.*

Démonstration. Par définition, d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes ssi les ouverts coïncident, i.e., ssi Id_E et $\mathrm{Id}_E^{-1} = \mathrm{Id}_E$ tirent les ouverts sur des ouverts, i.e., ssi Id_E est un homéomorphisme. □

Définition 5.3. Une fonction *bi-lipschitzienne* est une fonction lipschitzienne dont la réciproque est aussi lipschitzienne, une isométrie est une fonction bi-lipschitzienne de constante 1 des deux côtés.

Exercice 5.1. Montrer qu'une application bi-lipschitzienne est un homéomorphisme.

6 La Compacité

La compacité est une propriété topologique fondamentale qui permet de généraliser des propriétés triviales des espaces finis.

6.1 Propriété de Bolzano-Weierstrass

Un espace métrique (E,d) est dit **séquentiellement compact ou a la propriété de Bolzano-Weierstrass** si de toute suite d'éléments de E on peut extraire une sous-suite convergente (dont la limite est dans E).

6.2 Définition

Un espace métrique (E,d) est dit **compact** si de tout recouvrement de E par des ouverts, on peut extraire un **sous-recouvrement fini**. Autrement dit, si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts telle que $E = \bigcup_{i\in I} U_i$, alors il existe une partie finie $J \subseteq I$ telle que $E = \bigcup_{i\in J} U_i$.

Attention : La définition ne dit pas que l'on peut recouvrir E par un nombre fini d'ouverts, ce qui est toujours vrai, car E lui-même est un ouvert de E et (E) est un recouvrement fini de E.

Il suit par passage aux complémentaires que E est compact si et seulement si *de toute famille de fermés d'intersection vide on peut extraire une sous-famille d'intersection vide*, ou encore, en utilisant la contraposition, si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de fermés décroissante, i.e. $F_i \subseteq F_j$ pour tout $i \leq j \in I$, et que $F_i \neq \emptyset$ pour tout $i \in I$, alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est non vide.

Théorème 6.1. *Pour un espace métrique, être compact et être séquentiellement compact (avoir la propriété de Bolzano-Weierstrass) sont équivalents.*

Démonstration. ($\Rightarrow$) *Compact $\Rightarrow$ séquentiellement compact.* Soit (x_n) une suite dans E compact. Soit $A_n := \{x_k : k \geq n\}$ pour $n \in \mathbb{N}$. On considère la suite des fermés définis par $F_n = \overline{A_n}$. Par compacité, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une intersection non vide F. Soit $x \in F$. Alors x est un point d'accumulation de (x_n) : En effet, soit $\epsilon > 0$. Alors pour tout n, $B(x,\epsilon) \cap A_n \neq \emptyset$ par définition de l'adhérence. Autrement dit, pour tout n, il existe $k \geq n$ tel que $x_k \in B(x,\epsilon)$, ce qui est bien la définition d'être un point d'accumulation de la suite $(x_n)_n$.

($\Leftarrow$) *Séquentiellement compact $\Rightarrow$ compact.* La preuve se décompose en deux lemmes indépendants.

Lemme 1 (Nombre de Lebesgue) : *Soit E séquentiellement compact et $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de E. Il existe $\lambda > 0$ (appelé* ***nombre de Lebesgue*** *du recouvrement) tel que toute boule de rayon λ est contenue dans au moins un U_i.*

Preuve du Lemme 1 : Supposons par l'absurde qu'un tel λ n'existe pas : en considérant $\lambda = 1$, $\lambda = 1/2$, $\lambda = 1/4$, ...successivement, on voit que pour tout, $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in E$ tel que $B(x_n, 1/2^n)$ n'est contenue dans aucun des U_i ; autrement dit, pour tout n, $B(x_n, 1/2^n) \setminus U_i \neq \emptyset$ pour tout $i \in I$. Par compacité séquentielle, on extrait une sous-suite convergente $x_{n_k} \to x \in E$. Comme les U_i recouvrent E, il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$. Puisque U_{i_0} est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subseteq U_{i_0}$. Pour k assez grand, on a $d(x_{n_k}, x) < r/2$ et $1/n_k < r/2$, donc $B(x_{n_k}, 1/n_k) \subseteq B(x,r) \subseteq U_{i_0}$, contradiction. $\square_{\text{Lemme 1}}$

Lemme 2 (Propriété des réverbères / Précompacité) : *Soit E séquentiellement compact. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble fini $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq E$ tel que $E = \bigcup_{j=1}^n B(a_j, \varepsilon)$.*

Preuve du Lemme 2 : Supposons par l'absurde que pour un certain $\varepsilon > 0$, aucun ensemble fini de boules de rayon ε ne recouvre E. On construit par récurrence une suite (x_n) telle que pour tout n, $x_n \notin \bigcup_{k<n} B(x_k, \varepsilon)$: on choisit x_0 arbitrairement, puis, $\{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ étant construits, comme $\bigcup_{k<n} B(x_k, \varepsilon) \neq E$ par hypothèse, on choisit x_n dans le complémentaire. Par construction, $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ pour tous $n \neq m$. Une telle suite ne peut admettre de sous-suite convergente, contredisant la compacité séquentielle. $\square_{\text{Lemme 2}}$

Preuve du théorème : Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de E. Par le Lemme 1, il existe un nombre de Lebesgue $\lambda > 0$. Par le Lemme 2 appliqué à $\varepsilon = \lambda$, il existe $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq E$ tel que $E = \bigcup_{j=1}^n B(a_j, \lambda)$. Par définition du nombre de Lebesgue, chaque boule $B(a_j, \lambda)$ est contenue dans un certain U_{i_j}. Donc $E = \bigcup_{j=1}^n B(a_j, \lambda) \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{i_j}$, ce qui fournit un sous-recouvrement fini. $\square$

Remarque 6.1 (Inversion de quantificateurs)**.** Le Lemme 1 illustre un phénomène remarquable. Il s'agit transformer la propriété

$$\forall x \in E, \exists \lambda_x > 0, \quad B(x, \lambda_x) \subseteq U_{i(x)} \text{ pour un certain } i(x) \in I.$$

à :

$$\exists \lambda > 0, \forall x \in E, \quad B(x, \lambda) \subseteq U_{i(x)} \text{ pour un certain } i(x) \in I.$$

Cette *inversion des quantificateurs* $\forall\exists \to \exists\forall$ est en général fausse ! C'est précisément la compacité qui la rend possible ici. Ce phénomène est caractéristique des arguments de compacité et doit attirer l'attention chaque fois qu'un problème du type similaire (réduire la dépendance aux paramètres, uniformiser une constante, etc.) se présente dans un contexte de nature finie.

Corollaire 6.1. *Le produit d'un nombre fini d'espaces compacts est compact.*

6.3 Sous-ensembles compacts

Le cas de $\mathbb{R}^n$ est fondamental et servira de modèle pour les espaces de dimension finie. Nous allons voir que la compacité y coïncide avec une intuition géométrique simple : être borné et fermé.

La propriété clé des intervalles : Comme de toute suite bornée de $\mathbb{R}$, on peut extraire une sous-suite convergente (Bolzano-Weierstrass). Si la suite est à valeurs dans un intervalle fermé borné $[a, b]$, la limite reste dans $[a, b]$ (car c'est un fermé). Donc l'intervalle $[a, b]$ (muni de la distance induite) est compact.

Par produit, l'hypercube $[-M, M]^n$, muni de la distance sup (ou de la distance euclidienne, ou de d_1) est compact.

Définition 6.1 (Partie compacte)**.** Une partie K d'un espace métrique E est dite *compacte* si l'espace $(K, d_{|K})$ est compact.

Cela revient à dire que de toute suite de K, on peut extraire une sous-suite convergeant vers un point **de K**.

C'est encore équivalent à dire que si K est inclus dans une union d'ouverts de **E***, il existe un nombre fini de ces ouverts dont la réunion contient K :*

$$K \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i \quad \Rightarrow \quad \exists J \subseteq I, \quad K \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i.$$

Exercice 6.1. Montrer que toute partie compacte est fermée et bornée.

Théorème 6.2 (Heine-Borel dans $\mathbb{R}^n$)**.** *Dans $\mathbb{R}^n$ muni de la distance euclidienne, une partie K est compacte si et seulement si elle est* ***fermée et bornée****.*

Démonstration. ($\Rightarrow$) Toute partie compacte est fermée et bornée par l'exercice ci-dessus.
($\Leftarrow$) Soit K fermé et borné. Comme K est borné, $K \subseteq [-M, M]^n$ pour un certain M. L'hypercube $[-M, M]^n$ a la propriété de Bolzano-Weierstrass. K est un fermé inclus dedans, donc toute suite d'éléments de K admet une sous-suite convergeant dans le cube, et la limite est dans K (car fermé). Donc K est compact. $\square$

Corollaire 6.2. *Toute partie fermée d'un compact est compacte.*

En effet cela se déduit de la preuve ci-dessus, mais donnons une preuve qui est valable dans les espaces topologiques en général.

Démonstration. Soit F fermé dans E compact. Soit $(V_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de F (les V_i sont ouverts de F). Alors $(U_i)_{i \in I} \cup \{E \setminus F\}$ est un recouvrement ouvert de E. Par compacité de E, on en extrait un sous-recouvrement fini. En retirant $E \setminus F$ si nécessaire, on obtient un sous-recouvrement fini de F. $\square$

6.4 Image d'un compact

Théorème 6.3. *L'image d'un compact par une application continue est compacte.*

Démonstration. Soit E compact, $f : E \to F$ continue, et $(V_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $f(E)$. Alors $(f^{-1}(V_i))_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de E (par continuité). Par compacité de E, on extrait un sous-recouvrement fini $(f^{-1}(V_{i_k}))_{k=1}^n$. Alors $(V_{i_k})_{k=1}^n$ recouvre $f(E)$. $\square$

Exercice 6.2. Montrer que l'image d'une partie compacte par une application continue est une partie compacte.

Corollaire 6.3 (Théorème des bornes atteintes)**.** *Si E est compact et $f : E \to \mathbb{R}$ est continue, alors f est* ***bornée*** *et* ***atteint ses bornes*** *: il existe $x_{\min}, x_{\max} \in E$ tels que $f(x_{\min}) = \inf f(E)$ et $f(x_{\max}) = \sup f(E)$.*

Démonstration. $f(E)$ est compact dans $\mathbb{R}$ (par le théorème ci-dessus), donc fermé et borné. L'infimum et le supremum sont donc atteints. $\square$

Corollaire 6.4. *Si $f : E \to F$ est continue, bijective, et E est compact, alors f est un homéomorphisme.*

Démonstration. Il suffit de montrer que f^{-1} est continue, i.e., que f envoie les fermés sur des fermés. Soit $G \subseteq E$ fermé. Comme E est compact, G est compact (proposition ci-dessus). Donc $f(G)$ est compact (théorème ci-dessus), donc fermé dans F. $\square$

Ce résultat est puissant : la continuité de f^{-1} est "gratuite" si le départ est compact.

Contre-exemple : Si l'espace de départ n'est pas compact, une bijection continue n'est pas forcément un homéomorphisme. Considérons l'application $f : [0, 2\pi[\to S^1 \subset \mathbb{C}$ définie par $f(t) = e^{it}$.

— f est continue et bijective.

— Pourtant, f^{-1} n'est pas continue au point 1. Considérons la suite $z_n = e^{i(2\pi - 1/n)}$. On a $z_n \to 1$ dans S^1, mais la suite des antécédents $f^{-1}(z_n) = 2\pi - 1/n$ converge vers 2π dans $\mathbb{R}$, et non vers $0 = f^{-1}(1)$.

Géométriquement, l'application inverse "déchire" le cercle au point 1 pour l'aplatir sur l'intervalle ; cette déchirure correspond à la discontinuité.

7 La Continuité dans les Espaces Vectoriels Normés

Lorsque l'espace métrique porte une structure linéaire (espace vectoriel normé), l'étude de la continuité des applications linéaires se simplifie remarquablement.

Théorème 7.1. *Soit $u : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels normés. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *u est continue (partout).*
2. *u est continue en* 0.
3. *u est **bornée sur la sphère unité** :* $\sup_{\{||x|| \leq 1\}} ||u(x)|| < \infty$.
4. *u est **lipschitzienne**.*

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2) : trivial.
(2) $\Rightarrow$ (3) : Par continuité en 0, il existe $\eta > 0$ tel que $||x|| < \eta \Rightarrow ||u(x)|| < 1$. Pour $||x|| \leq 1$, on a $\left||\frac{\eta}{2}x\right|| < \eta$, donc $\left||u\left(\frac{\eta}{2}x\right)\right|| < 1$, i.e., $||u(x)|| < 2/\eta$.
(3) $\Rightarrow$ (4) : Posons $M = \sup_{||x|| \leq 1} ||u(x)||$. Pour $x \neq y$, on a $\frac{x-y}{||x-y||}$ de norme 1, donc $\left||u\left(\frac{x-y}{||x-y||}\right)\right|| \leq M$, i.e., $||u(x) - u(y)|| \leq M||x - y||$.
(4) $\Rightarrow$ (1) : Déjà démontré (applications lipschitziennes sont continues). $\square$

Cette simplification a une conséquence brutale en **dimension finie** :

7.1 Équivalence des Normes en Dimension Finie

Définition 7.1. Deux normes N_1 et N_2 sur un espace vectoriel E sont dites **équivalentes** si les distances associées sont lipschitziquement équivalentes, i.e., s'il existe deux constantes $a, b > 0$ telles que pour tout $x \in E$:

$$aN_1(x) \leq N_2(x) \leq bN_1(x).$$

Cette condition signifie que l'identité Id : $(E, N_1) \to (E, N_2)$ est un isomorphisme bilipschitzien.

Théorème 7.2 (Équivalence des normes en dimension finie)**.** *Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Démonstration. Soit E un espace vectoriel de dimension n. Fixons une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. On définit l'isomorphisme de coordonnées :

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to E, \quad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

On définit alors une fonction $||\cdot||_{\text{ref}} : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ par $||\cdot||_{\text{ref}} = ||\cdot||_\infty \circ \varphi^{-1}$. Pour $x = \sum \lambda_i e_i = \varphi(\lambda)$, on a $||x||_{\text{ref}} = \max |\lambda_i| = ||\lambda||_\infty$.

Justification : C'est bien une norme sur E car $||\cdot||_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty) \to (E, ||\cdot||_{\text{ref}})$ est une isométrie linéaire par construction.

Soit maintenant $||\cdot||$ une norme **arbitraire** sur E. Montrons qu'elle est équivalente à cette norme de référence.

1. **Majoration :** Pour $x = \sum \lambda_i e_i \in E$, on a par inégalité triangulaire :

$$||x|| = ||\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i|| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| ||e_i|| \leq \left(\max_j |\lambda_j|\right) \sum_{i=1}^{n} ||e_i|| = \left(\sum ||e_i||\right) ||x||_{\text{ref}}.$$

En posant $M = \sum ||e_i||$, on a $||x|| \leq M||x||_{\text{ref}}$. Cela implique également que φ est liptschizienne, à fortiori continue, vu $\mathbb{R}^n \to E, ||\cdot||$, car $||\varphi(\lambda)|| \leq M||\varphi(\lambda)||_{\text{réf}} = M||\lambda||_\infty$

Donc la sphère unité $S_{\text{ref}} = \{x \in E \mid ||x||_{\text{ref}} = 1\}$ est l'image directe de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ (compacte) par la fonction continue $\varphi : \mathbb{R}^n \to (E, ||\cdot||)$. Elle est donc compacte dans $(E, ||\cdot||)$.

2. **Minoration :** La norme $||\cdot|| : E \to \mathbb{R}$ étant continue, elle atteint son minimum m sur le compact S_{ref}.

$$m = \min_{x \in S_{\text{ref}}} ||x||.$$

Comme $||\cdot||$ est une norme et $0 \notin S_{\text{ref}}$, on a $||x|| > 0$ pour tout $x \in S_{\text{ref}}$, donc $m > 0$. Pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, le vecteur normalisé $u = x/||x||_{\text{ref}}$ appartient à S_{ref}. Donc :

$$||u|| \geq m \implies \left|| \frac{x}{||x||_{\text{ref}}} \right|| \geq m \implies ||x|| \geq m||x||_{\text{ref}}.$$

Donc on a $m||x||_{\text{ref}} \leq ||x|| \leq M||x||_{\text{ref}}$.

Toutes les normes sur E sont équivalentes à la norme de référence $||\cdot||_{\text{ref}}$, donc elles sont toutes équivalentes entre elles par transitivité. □

Corollaire 7.1. *Tout sous-espace de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé.*

Démonstration. L'équivalence de normes implique que les applications linéaires sont continues (cf. TD6). Soit $F \subset E$ un sous-espace de dimension finie. Si $F = E$, il est clairement fermé. Sinon, F est un sous-espace strictement inclus dans E. Soit $x \in E \setminus F$. Considérons $E' = F \oplus \mathbb{R}x$. Considérons l'application linéaire $\varphi : E' \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f + \lambda x) = \lambda$. Alors $F = \ker \varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$ est fermé car φ est continue. □

7.2 Lemme de Riesz (Presque-orthogonalité)

Le lemme suivant est un outil fondamental pour l'étude des espaces de dimension infinie.

Lemme 7.1 (Riesz)**.** *Soit E un espace vectoriel normé et $F \subsetneq E$ un sous-espace* ***fermé*** *strict. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u \in E$ tel que $||u|| = 1$ et $d(u, F) \geq 1 - \varepsilon$.*

Intuition : En dimension finie avec un produit scalaire, on peut toujours trouver un vecteur orthogonal à un sous-espace, avec $d(u, F) = 1$. En dimension infinie, sans produit scalaire, on ne peut pas garantir cette orthogonalité exacte, mais on peut s'en approcher arbitrairement.

Démonstration. Soit $x \in E \setminus F$. Posons $\delta = d(x, F) = \inf_{y \in F} ||x - y|| > 0$ (strictement positif car F est fermé et $x \notin F$). Par définition de l'infimum, il existe $y_0 \in F$ tel que $||x - y_0|| < \delta/(1 - \varepsilon)$. Posons $u = (x - y_0)/||x - y_0||$. Alors $||u|| = 1$. Pour tout $y \in F$, on a $y_0 + ||x - y_0||y \in F$, donc :

$$d(u, F) = \inf_{y \in F} ||u - y|| = \frac{1}{||x - y_0||} \inf_{z \in F} ||x - z|| = \frac{\delta}{||x - y_0||} > 1 - \varepsilon.$$ □

7.3 Théorème de la Dimension Finie

Le résultat suivant unifie les propriétés fondamentales des espaces de dimension finie.

Théorème 7.3 (Grand Théorème)**.** *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\dim(E) < +\infty$.
2. *La boule unité fermée $\bar{B} = \{x \in E \mid ||x|| \leq 1\}$ est compacte.*
3. *Toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (3) : C'est le théorème d'équivalence des normes ci-dessus.

(3) $\Rightarrow$ (2) : Supposons $\dim(E) = n$ et toutes les normes équivalentes. Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to E$ l'isomorphisme de coordonnées. Par équivalence des normes, φ est un homéomorphisme. La boule $\bar{B}$ est l'image de l'ensemble $\varphi^{-1}(\bar{B})$, qui est fermé et borné dans $\mathbb{R}^n$ (par équivalence des normes). Par Heine-Borel dans $\mathbb{R}^n$, cet ensemble est compact, et l'image continue d'un compact est compacte.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Contraposée. Supposons $\dim(E) = +\infty$. Par le **Lemme de Riesz**, on construit par récurrence une suite (u_n) dans la sphère unité telle que $||u_n - u_m|| \geq 1/2$ pour $n \neq m$:

- Soit u_0 de norme 1. Posons $F_n = \text{vect}(u_0, \ldots, u_n)$.
- F_n est de dimension finie, donc **fermé** (par le corollaire ci-dessus).
- Par Riesz appliqué à F_n avec $\varepsilon = 1/2$, on choisit u_{n+1} de norme 1 avec $d(u_{n+1}, F_n) \geq 1/2$.

Cette suite n'admet pas de sous-suite de Cauchy, donc la boule unité n'est pas séquentiellement compacte, donc pas compacte. ☐

Corollaire 7.2.

1. ***Unicité de la topologie :*** *Sur un evn de dimension finie, toutes les normes définissent la même topologie.*
2. ***Heine-Borel (evn) :*** *En dimension finie, une partie est compacte ssi elle est fermée et bornée.*

7.4 Compacité locale : une propriété intermédiaire

La compacité globale (tout recouvrement ouvert admet un sous-recouvrement fini) est une propriété très forte, trop forte pour la plupart des espaces rencontrés en pratique. L'espace $\mathbb{R}^n$ lui-même n'est pas compact ! Et pourtant, $\mathbb{R}^n$ possède de "bonnes" propriétés de compacité : autour de chaque point, on peut trouver un voisinage compact. C'est cette propriété plus souple qui s'avère fondamentale.

Définition 7.2. Un espace topologique E est dit **localement compact** si tout point $x \in E$ admet un voisinage compact, c'est-à-dire s'il existe un compact K et un ouvert U tels que $x \in U \subseteq K$.

Exemples fondamentaux :

- $\mathbb{R}^n$ est localement compact : autour de tout point x, la boule fermée $\bar{B}(x, 1)$ est un voisinage compact (par Heine-Borel).
- Plus généralement, tout evn de dimension finie est localement compact (corollaire du Grand Théorème).
- Les **nombres p-adiques** $\mathbb{Q}_p$ forment un corps localement compact. C'est l'un des exemples les plus importants en théorie des nombres. La topologie p-adique (cf. Section 1, distance ultramétrique) confère à $\mathbb{Q}_p$ des propriétés remarquables : la boule unité $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$ (l'anneau des entiers p-adiques) est compacte. Ainsi, tout point de $\mathbb{Q}_p$ admet un voisinage compact par translation.
- En revanche, un evn de dimension infinie n'est **jamais** localement compact (la boule unité n'est pas compacte, et aucun voisinage de 0 ne l'est non plus).

La compacité locale est une notion centrale en analyse harmonique et en théorie des groupes. Les **groupes localement compacts** (groupes topologiques dont l'espace sous-jacent est localement compact) admettent une mesure de Haar, généralisant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

7.5 La dimension infinie (TD6)

En dimension infinie, il existe des applications linéaires discontinues et des normes non équivalentes. L'exemple canonique est l'**opérateur de dérivation** $D(f) = f'$ sur $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme $||f||_\infty = \sup |f(t)|$. Considérez la suite $f_n(t) = \frac{1}{n}\sin(n^2 t)$. On a $||f_n||_\infty = 1/n \to 0$, donc f_n converge vers la fonction nulle au sens de la norme sup. Pourtant, $D(f_n)(t) = n\cos(n^2 t)$, d'où $||D(f_n)||_\infty = n \to \infty$. La suite des dérivées diverge ! Cela montre aussi que sur $\mathcal{C}^1$, la norme $||f||_\infty$ et la norme $||f||_{C^1} = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$ ne sont pas équivalentes (la convergence pour l'une n'implique pas la convergence pour l'autre).

7.6 L'espace des matrices, un exemple : $GL_n(\mathbb{R})$ et la Généricité (TD6)

L'espace des matrices $M_n(\mathbb{R})$ est identifié à $\mathbb{R}^{n^2}$. Le déterminant det : $M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est continu (polynômial). Le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ est donc un **ouvert**.

Densité et Généricité : Le TD6 montre que $GL_n(\mathbb{R})$ est **dense** dans $M_n(\mathbb{R})$: toute matrice A est limite d'une suite de matrices inversibles $A - \varepsilon_n I$. Topologiquement, être inversible est une propriété *génériquement vraie*, être singulier est l'exception.

— *Sens topologique :* L'ensemble des matrices singulières est un fermé d'intérieur vide (un ensemble "maigre").

— *Sens probabiliste :* Si l'on choisit une matrice "au hasard" (selon la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{n^2}$), la probabilité qu'elle soit singulière est nulle (l'hypersurface $\det(M) = 0$ est de mesure nulle).

C'est une intuition puissante en analyse : souvent, les objets "pathologiques" ou "singuliers" forment un ensemble négligeable, et une petite perturbation suffit à se ramener au cas "générique" (inversible, diagonalisable, fonction de Morse, etc.).

8 Connexité

La compacité garantit des propriétés de finitude (recouvrements finis, suites convergentes). La **connexité** capture une idée orthogonale : celle d'un espace "d'un seul tenant", sans rupture ni séparation. Intuitivement, un espace connexe est un espace que l'on ne peut pas "couper en deux morceaux disjoints" sans le déchirer.

8.1 Le 2-Coloriage

Comment formaliser l'idée qu'un espace peut être "séparé" ? Imaginons que l'on essaie de colorier les points de E avec deux couleurs, disons 0 et 1, de manière *continue* — c'est-à-dire sans créer de frontière abrupte où la couleur change brusquement.

Définition 8.1. Un **2-coloriage** d'un espace métrique (E, d) est une application continue et non constante $f : E \to \{0, 1\}$, où $\{0, 1\}$ est muni de la distance discrète.

Si un tel 2-coloriage existe, l'espace se décompose naturellement en deux "morceaux" : $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{1\})$. Ces morceaux forment une partition de E, et par continuité de f, ce sont des ouverts (et donc aussi des fermés, puisqu'ils sont complémentaires l'un de l'autre). Un espace connexe sera donc un espace où un tel coloriage est *impossible*.

8.2 Caractérisations Équivalentes

Proposition 8.1. *Soit (E, d) un espace métrique. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il n'existe pas de 2-coloriage de E.*
2. *Il n'existe pas de partition de E en deux ouverts non vides.*
3. *Il n'existe pas de partition de E en deux fermés non vides.*

Démonstration. (1) $\Leftrightarrow$ (2) : Supposons qu'il existe une partition $E = U \sqcup V$ avec U, V ouverts non vides. Alors $f = \mathbf{1}_V$ (indicatrice de V) est continue (car $f^{-1}(\{0\}) = U$ et $f^{-1}(\{1\}) = V$ sont ouverts) et non constante, donc c'est un 2-coloriage. Réciproquement, si $f : E \to \{0, 1\}$ est un 2-coloriage, alors $U = f^{-1}(\{0\})$ et $V = f^{-1}(\{1\})$ forment une partition en ouverts non vides.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) : Si $E = U \sqcup V$ avec U, V ouverts, alors $U = E \setminus V$ et $V = E \setminus U$ sont fermés. Réciproquement, si $E = F_1 \sqcup F_2$ avec F_1, F_2 fermés, alors chacun est le complémentaire de l'autre, donc ouvert. □

Définition 8.2. Un espace métrique (E, d) est dit **connexe** s'il satisfait les conditions équivalentes de la proposition ci-dessus. Par convention, l'espace vide est connexe.

Reformulation utile : Un espace E est connexe si et seulement si les seules parties de E qui sont à la fois ouvertes et fermées sont $\emptyset$ et E lui-même.

8.3 Parties Connexes

Définition 8.3. Une partie A d'un espace métrique (E, d) est dite **connexe** si l'espace métrique $(A, d_{|A})$ est connexe.

Cela revient à dire qu'il n'existe pas de partition $A = (A \cap U) \sqcup (A \cap V)$ où U, V sont des ouverts de E avec $A \cap U \neq \emptyset$ et $A \cap V \neq \emptyset$.

Théorème 8.1. $\mathbb{R}$ *est connexe. Plus généralement, une partie de* $\mathbb{R}$ *est connexe si et seulement si c'est un intervalle.*

Démonstration. **$\mathbb{R}$ est connexe :** Supposons par l'absurde que $\mathbb{R} = U \sqcup V$ avec U, V ouverts non vides. Soient $a \in U$ et $b \in V$ avec $a < b$ (quitte à échanger). Posons $c = \sup(U \cap [a, b])$. Comme U est ouvert, si $c \in U$, alors $c + \varepsilon \in U$ pour ε petit, contredisant la définition du sup. Donc $c \in V$. Mais V est ouvert, donc $c - \varepsilon \in V$ pour ε petit, contredisant que c est le sup de points de U. Contradiction.

Intervalle $\Rightarrow$ connexe : Soit I un intervalle. Si $I = U \sqcup V$ avec U, V ouverts relatifs non vides, le même argument du sup s'applique.

Connexe $\Rightarrow$ intervalle : Si $A \subseteq \mathbb{R}$ n'est pas un intervalle, il existe $a < c < b$ avec $a, b \in A$ et $c \notin A$. Alors $A = (A \cap]-\infty, c[) \sqcup (A \cap]c, +\infty[)$ est une partition en ouverts non vides. □

8.4 Image d'un Connexe

Théorème 8.2. *L'image d'un espace connexe par une application continue est connexe.*

Démonstration. Soit $f : E \to F$ continue avec E connexe. Si $f(E)$ n'était pas connexe, il existerait une partition $f(E) = U \sqcup V$ en ouverts relatifs non vides. Alors $E = f^{-1}(U) \sqcup f^{-1}(V)$ serait une partition de E en ouverts non vides (par continuité), contredisant la connexité de E. □

Corollaire 8.1 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.*

Démonstration. L'intervalle $[a, b]$ est connexe, donc $f([a, b])$ est connexe dans $\mathbb{R}$, donc c'est un intervalle. Cet intervalle contient $f(a)$ et $f(b)$, donc contient tout point intermédiaire. □

8.5 Connexité par Arcs

Une notion plus forte et plus intuitive de connexité est la connexité par arcs : deux points peuvent être reliés par un "chemin" continu.

Définition 8.4. Un **chemin** (ou **arc**) dans (E, d) est une application continue $\gamma : [0, 1] \to E$. On dit que γ relie $\gamma(0)$ à $\gamma(1)$.

Définition 8.5. Un espace métrique (E, d) est dit **connexe par arcs** si pour tous $x, y \in E$, il existe un chemin $\gamma : [0, 1] \to E$ tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Proposition 8.2. *Tout espace connexe par arcs est connexe.*

Démonstration. Soit E connexe par arcs et supposons $E = U \sqcup V$ avec U, V ouverts non vides. Soient $a \in U$ et $b \in V$. Il existe un chemin $\gamma : [0, 1] \to E$ reliant a à b. Alors $[0, 1] = \gamma^{-1}(U) \sqcup \gamma^{-1}(V)$ serait une partition de $[0, 1]$ en ouverts non vides (par continuité de γ), contredisant la connexité de $[0, 1]$. □

La réciproque est fausse en général : le **peigne topologique** (cf. TD7, Exercice 5) est connexe mais pas connexe par arcs.

Théorème 8.3. $\mathbb{R}^n$ *est connexe par arcs.*

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. Le segment $\gamma(t) = (1 - t)x + ty$ pour $t \in [0, 1]$ est un chemin continu reliant x à y. □

Corollaire 8.2. *Tout ouvert connexe de* $\mathbb{R}^n$ *est connexe par arcs.*

Idée de preuve. Soit U un ouvert connexe et $a \in U$. Posons $A = \{x \in U : \text{il existe un chemin dans } U \text{ de } a \text{ à } x\}$. On montre que A est ouvert (car U est ouvert : autour de chaque point de A, une boule entière est reliée) et fermé dans U (par le même argument). Par connexité de U, $A = U$. □

Exemple : $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est connexe par arcs (on peut contourner l'origine), mais $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ n'est pas connexe (cf. TD7, Exercice 6).

8.6 Composantes Connexes

Dans un espace non connexe, on peut identifier les "morceaux" maximaux connexes.

Définition 8.6. Soit $x \in E$. La **composante connexe** de x, notée C_x, est la réunion de toutes les parties connexes de E contenant x.

Proposition 8.3.
1. *C_x est connexe (la réunion de connexes ayant un point commun est connexe).*
2. *C_x est le plus grand connexe contenant x.*
3. *Les composantes connexes forment une partition de E.*
4. *Chaque composante connexe est fermée.*

La preuve du point (4) utilise le fait que l'adhérence d'un connexe est connexe (cf. TD7, Exercice 4).

Exemples :
— Les composantes connexes de $\mathbb{Q}$ sont les singletons $\{q\}$ pour $q \in \mathbb{Q}$ (espace **totalement discontinu**).
— Les composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$ sont $\{A : \det(A) > 0\}$ et $\{A : \det(A) < 0\}$ (cf. TD7, Exercice 4e).

8.7 Convexité et Connexité dans les EVN

Dans un espace vectoriel normé, la structure linéaire fournit un critère simple et puissant de connexité.

Définition 8.7. Soit E un espace vectoriel. Une partie $C \subseteq E$ est dite **convexe** si pour tous $x, y \in C$ et tout $t \in [0, 1]$, on a $(1-t)x + ty \in C$.

Géométriquement, un convexe contient tous les segments joignant deux quelconques de ses points.

Proposition 8.4. *Toute partie convexe d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs, donc connexe.*

Démonstration. Soit C convexe et soient $x, y \in C$. Le chemin $\gamma(t) = (1-t)x + ty$ est continu (combinaison linéaire de fonctions continues), et par convexité, $\gamma(t) \in C$ pour tout $t \in [0, 1]$. Donc C est connexe par arcs. □

Exemples fondamentaux :

— Les boules ouvertes et fermées d'un evn sont convexes, donc connexes.

— Tout sous-espace vectoriel est convexe, donc connexe.

— L'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points (un polytope) est convexe, donc connexe.

Application : Spectre d'un opérateur auto-adjoint. En analyse fonctionnelle, le spectre $\sigma(T)$ d'un opérateur borné T sur un espace de Hilbert est un compact non vide de $\mathbb{C}$. Pour un opérateur auto-adjoint, $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$. Un résultat classique affirme que $\sigma(T)$ est exactement l'intervalle $[m, M]$ où $m = \inf_{||x||=1}\langle Tx, x\rangle$ et $M = \sup_{||x||=1}\langle Tx, x\rangle$. Le spectre est donc un *intervalle* — un connexe de $\mathbb{R}$. Cette propriété repose fondamentalement sur le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à $x \mapsto \langle Tx, x\rangle$ sur la sphère unité (connexe par arcs).